令和五年

$n \times n$ 実対称行列 $A = [a_{ij}]_{n\times n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ に対して，A の各要素 a_{ij} が $a_{ij} \in \{0, 1\}$ $(1 \leq i, j \leq n)$ かつ $a_{ii} = 0$ $(1 \leq i \leq n)$ を満たすとする．A に対して，$D = [\delta_{ij}(\sum_{k=1}^{n} a_{ik})]_{n\times n}$ と定義する．ただし δ_{ij} は，$1 \leq i, j \leq n$ に対して，$i = j$ のとき $\delta_{ij} = 1$，そうでないとき $\delta_{ij} = 0$ によって定義される．さらに，$L = D - A$ と定義する．以下の各問いに答えよ．

(1) 以下の A に対して，$L = D - A$ を求めよ．

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(2) (1) で求めた L の固有値を全て求めよ．

(3) (2) で求めた L の各固有値に対する固有空間を求めよ．

(4) 一般に L は固有値 0 を持つことを示せ．

解答

（1）

$$L = D - A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

（2）

$$\because |T| = |\lambda E - L| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda - 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 3)^2 = 0 \tag{2}$$

$$\therefore \lambda_1 = 0\,(2\text{重解}) \quad \lambda_2 = 3\,(2\text{重解})$$

（3）

$$\lambda_1 = 0のとき, T_1 x_1 = 0, そして, x_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} とおくと,$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = 0 \tag{3}$$

$$x_1 = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow V(0) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\lambda_2 = 3のとき, T_2 x_2 = 0, そして, x_2 = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} とおくと,$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} = 0 \tag{4}$$

$$x_2 = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow V(3) = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

（４）

$$\begin{aligned}
|L| &= \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k} - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \sum_{k=1}^{n} a_{2k} - a_{22} & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ -a_{31} & -a_{32} & \sum_{k=1}^{n} a_{3k} - a_{33} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{nk} - a_{nn} \end{vmatrix} \\
|L| &= \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ 0 & \sum_{k=1}^{n} a_{2k} - a_{22} & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ 0 & -a_{32} & \sum_{k=1}^{n} a_{3k} - a_{33} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -a_{n2} & -a_{n3} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{nk} - a_{nn} \end{vmatrix} \\
|L| &= 0 \\
&\lambda = 0のとき, |L - \lambda E| = |L| = 0
\end{aligned} \tag{5}$$

令和四年

n 次元ユークリッド空間上の $n+1$ 個の点 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ に対し，2 点 $\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{p}_j$ 間のユークリッド距離を $d_{i,j} = \|\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{p}_j\|$ で表す．ただし，各 $\boldsymbol{p}_i$ は列ベクトルである．また，$g_{i,j} = d_{i,n+1}^2 + d_{j,n+1}^2 - d_{i,j}^2$ $(1 \leq i, j \leq n)$ を添字順に並べて得られる行列を $G = (g_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ とする．このとき以下の各問いに答えよ．

(1) $n = 2$ とする．以下の 2 つの場合に対して，等式条件を満たす 3 個の点 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3 \in \mathbb{R}^2$ の組をそれぞれ 1 つ求めよ．

(a) $(d_{1,2}, d_{1,3}, d_{2,3}) = (1, 1, 1)$

(b) $(d_{1,2}, d_{1,3}, d_{2,3}) = (1, 2, 3)$

(2) $\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{p}_j - \boldsymbol{p}_{n+1}$ $(1 \leq j \leq n)$ とし，$\boldsymbol{x}_j$ を添字順に並べて得られる行列を $X = (\boldsymbol{x}_j) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ とする．(1) で求めた答えに対し，$X^\top X$ をそれぞれ計算せよ．

(3) 一般に G が半正定値であることを示せ．ただし，$n \times n$ 実対称行列 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ が半正定値であるとは，任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して $\boldsymbol{v}^\top A\boldsymbol{v} \geq 0$ が成り立つことをいう．

解答

（1）

$$
\begin{aligned}
&(a) \quad (\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}, \boldsymbol{p_3}) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\
&(b) \quad (\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}, \boldsymbol{p_3}) = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)
\end{aligned} \tag{6}
$$

（2）

$$
\begin{aligned}
(b) \quad X = [\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}] = [\boldsymbol{p_1} - \boldsymbol{p_3}, \boldsymbol{p_2} - \boldsymbol{p_3}] &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \\
X^\top X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \\
(b) \quad X = [\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}] = [\boldsymbol{p_1} - \boldsymbol{p_3}, \boldsymbol{p_2} - \boldsymbol{p_3}] &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
X^\top X = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{7}
$$

（3）

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_i^\top \boldsymbol{x}_j &= (\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{p}_{n+1})^\top (\boldsymbol{p}_j - \boldsymbol{p}_{n+1}) \\
&= \boldsymbol{p}_i^\top \boldsymbol{p}_j - \boldsymbol{p}_i^\top \boldsymbol{p}_{n+1} - \boldsymbol{p}_j^\top \boldsymbol{p}_{n+1} + \|\boldsymbol{p}_{n+1}\|^2 \\
\\
g_{i,j} &= d_{i,n+1}^2 + d_{j,n+1}^2 - d_{i,j}^2 = g_{j,i} \\
&= \|\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{p}_{n+1}\|^2 + \|\boldsymbol{p}_j - \boldsymbol{p}_{n+1}\|^2 - \|\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{p}_j\|^2 \\
&= 2(\boldsymbol{p}_i^\top \boldsymbol{p}_j - \boldsymbol{p}_i^\top \boldsymbol{p}_{n+1} - \boldsymbol{p}_j^\top \boldsymbol{p}_{n+1} + \|\boldsymbol{p}_{n+1}\|^2) \\
&= 2\boldsymbol{x}_i^\top \boldsymbol{x}_j \\
\\
G &= 2X^\top X \\
\\
\boldsymbol{v}^\top G \boldsymbol{v} &= 2\boldsymbol{v}^\top X^\top X \boldsymbol{v} = 2(X\boldsymbol{v})^\top X\boldsymbol{v} = 2\|X\boldsymbol{v}\|^2 \geq 0
\end{aligned}
\tag{8}
$$

令和三年

$n \times m$ 実行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ の第 j 列 $(j = 1, 2, \ldots, m)$ を $a_j \in \mathbb{R}^n$ とする．各部分集合 $J \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$ について，その要素数を $|J|$ で表し，a_j $(j \in J)$ を j に関する昇順で左から並べて得られる A の部分行列を $A[J] \in \mathbb{R}^{n \times |J|}$ で表す．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 以下の行列 A に対し，$\{\, a_j \mid j \in J \,\}$ が線形独立であるような部分集合 $J \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ をすべて求めよ．

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 & -5 \\ -2 & -2 & 0 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}
$$

(2) (1) の行列 A に対し，$\operatorname{rank}(A[J]) < |J|$ を満たす部分集合 $J \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ であって，J の任意の真部分集合 $I \subsetneq J$ について $\operatorname{rank}(A[I]) = |I|$ が成り立つものをすべて求めよ．ただし，空集合 $\emptyset$ に対しては $\operatorname{rank}(A[\emptyset]) = 0$ と定義する．

(3) 一般の $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ について，$I \subseteq J \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$ かつ $\operatorname{rank}(A[J]) = |J|$ のとき，$\operatorname{rank}(A[I]) = |I|$ が成り立つことを示せ．

解答

（１）

$$
\begin{aligned}
&A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 & -5 \\ -2 & -2 & 0 & 4 & 6 & -10 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \\
&J = \{1\} \quad J = \{1,2\} \quad J = \{1,4\} \quad J = \{1,5\} \quad J = \{1,6\} \quad J = \{1,2,4\} \quad J = \{1,2,6\} \\
&J = \{2\} \quad J = \{2,4\} \quad J = \{2,6\} \quad J = \{2,4,6\} \\
&J = \{4\} \quad J = \{4,5\} \quad J = \{4,6\} \quad J = \{4,5,6\} \\
&J = \{5\} \quad J = \{5,6\} \\
&J = \{6\} \\
&J = \emptyset
\end{aligned}
\tag{9}
$$

（2）

$$J=\{3\} \quad J=\{2,5\} \quad J=\{1,4,6\} \tag{10}$$

（3）

$$\begin{gathered}\mathrm{rank}(A[J])=|J| \\ \{a_j|j\in J\}\text{は線型独立である。} \\ \text{線型独立な集合の部分集合は線型独立である。} \\ \{a_i|i\in I\}\text{は線型独立である。} \\ \mathrm{rank}(A[I])=|I|\end{gathered} \tag{11}$$

令和二年

数列 $a_0, a_1, a_2, \cdots$は，$a_0=3$，$a_1=1$，$a_2=3$ および

$$a_n = a_{n-1}+a_{n-2}+2a_{n-3} \qquad (n=3,4,5,\cdots)$$

で定義される．

(1) a_3, a_4, a_5 を求めよ．

(2) 各 $n=0,1,2,\cdots$について次が成立つような行列 T を答えよ．

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ a_{n+3} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix}$$

(3) T のすべての固有値とそれぞれに対応する固有ベクトルを求めよ．

(4) ベクトル $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ を，前問で求めた固有ベクトルの線形結合として表せ．

(5) a_n を求めよ．

解答

（1）

$$\begin{gathered} a_3=a_2+a_1+2a_0=3+1+2\times 3=10 \\ a_4=a_3+a_2+2a_1=10+3+2\times 1=15 \\ a_5=a_4+a_3+2a_2=15+10+2\times 3=31 \end{gathered} \tag{12}$$

（2）

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ a_{n+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ a_{n+2}+a_{n+1}+2a_n \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{bmatrix} \Rightarrow T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

（3）

$$\because |A| = |\lambda E - T| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -2 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda^2+\lambda+1)(\lambda-2) = 0$$

$$\therefore \lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \quad \lambda_3 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

$$\lambda_1 = 2 \text{のとき}, A_1x_1 = 0, \text{そして}, x_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \text{とおくと},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \text{のとき}, A_2x_2 = 0, \text{そして}, x_2 = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \text{とおくと}, \tag{14}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} & -1 \\ -2 & -1 & \frac{-3+\sqrt{3}i}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \\ \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \text{のとき}, A_3x_3 = 0, \text{そして}, x_3 = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} \text{とおくと},$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} & -1 \\ -2 & -1 & \frac{-3-\sqrt{3}i}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow x_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}i}{2} \end{bmatrix}$$

（4）

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \\ \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}i}{2} \end{bmatrix} \tag{15}$$

（5）

$$a_n = 2^n + 2\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) \tag{16}$$

令和元年

行列 $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -3 \\ 6 & 7 & 6 \\ -6 & -6 & -5 \end{pmatrix}$ について，次の各問に答えよ．

(1) $Ax = -2x$ なる零でないベクトル $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ を 1 つ求めよ．

(2) $Ay = dy$ なる数 $d \neq -2$ と零でないベクトル $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ を 1 つ求めよ．

(3) $AP = PD$ を満たす正則行列 P と対角行列 $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$ を 1 つ求めよ．

(4) P の逆行列 P^{-1} を求めよ．

(5) A^{10} を求めよ．

解答

（1）

$$\begin{aligned} & Ax = -2x \Rightarrow Ax + 2Ex = 0 \Rightarrow (A + 2E)x = 0 \\ \Rightarrow & \begin{bmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 6 & 9 & 6 \\ -6 & -6 & -3 \end{bmatrix} x = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x = 0 \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{17}$$

（2）

$$|T| = |A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -3 & -3 \\ 6 & 7-\lambda & 6 \\ -6 & -6 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+2) = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = -2$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \text{のとき}, T_1 x_1 = 0, \text{そして}, x_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \text{とおくと},$$

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & -3 \\ 6 & 6 & 6 \\ -6 & -6 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = 0 \tag{18}$$

$$x_1 = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$d = 1 \,\text{and}\, y = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

（3）

$$AP = PD \Rightarrow P^{-1}AP = D$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{19}$$

（4）

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \tag{20}$$

（5）

$$\begin{aligned} A^{10} &= (PDP^{-1})^{10} \\ &= PD^{10}P^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1024 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1024 & 1023 & 1023 \\ -2046 & -2045 & -2046 \\ 2046 & 2046 & 2047 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{21}$$