令和五年

【問 1】 以下の各問いに答えよ.

(1) 区間 $[0, a]$ $(a > 0)$ 上の一様分布に従う確率変数の微分エントロピーを求めよ.

(2) 区間 $[0, a]$ $(a > 0)$ 上で定義された確率密度関数 $p(x) = 2x/a^2$ に従う確率変数の微分エントロピーを求めよ.

解答

（１）

$$h(X) = -\int_0^a \frac{1}{a} \log \frac{1}{a} dx = \log a \tag{1}$$

（２）

$$h(X) = -\int_0^a \frac{2x}{a^2} \log \frac{2x}{a^2} dx = \log a + \frac{1}{2 \ln 2} - 1 \tag{2}$$

【問 2】 時刻 t の入力 $X_t \in \{0, 1\}$ $(t = 1, 2, \ldots)$ に対し，入力と独立な誤り源 S_E から発生した記号 $Z_t \in \{0, 1\}$ が加わった値 $Y_t = X_t \oplus Z_t$ が出力される加法的 2 元通信路 W を考える．ただし，$\oplus$ は排他的論理和を表し，$0 \oplus 1 = 1$, $1 \oplus 1 = 0$ である．誤り源 S_E が，$P(Z_{t+1} = 1|Z_t = 0) = 0.25$，$P(Z_{t+1} = 1|Z_t = 1) = 0.5$ となる定常な単純マルコフ情報源である場合について，以下の問いに答えよ.

(1) 誤り源 S_E の定常確率分布を求めよ.

(2) 誤り源 S_E のエントロピーレート $H(S_E)$ を求めよ.

(3) $X^n = (X_1, \ldots, X_n)$ が $P(X_t = 1) = 1/2$ $(t = 1, 2, \ldots, n)$ である離散無記憶情報源からの出力であり，$Z^n = (Z_1, \ldots, Z_n)$ が定数 $z^n \in \{0, 1\}^n$ に固定されていると仮定する．$Y^n = (Y_1, \ldots, Y_n)$ が $P(Y_t = 1) = 1/2$ $(t = 1, 2, \ldots, n)$ である離散無記憶情報源の出力であることを示せ.

(4) 通信路 W の通信路容量は以下の式で定義される.

$$C = \lim_{n \to \infty} \max_{P_{X^n} \in \mathcal{P}_n} \frac{1}{n} I(X^n; Y^n)$$

ただし，$I(X^n; Y^n)$ は X^n と Y^n の間の相互情報量を，P_{X^n} は入力 X^n の確率分布を，$\mathcal{P}_n$ は $\{0, 1\}^n$ 上の確率分布全てからなる集合を表す．このとき，$C = 1 - H(S_E)$ となることを示せ.

解答

（１）

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\text{定常確率分布を} w = (w_0, w_1) \text{とすると} \tag{3}$$

$$\begin{cases} w_0 + w_1 = 1 \\ w\Pi = w \end{cases} \Rightarrow w = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

（2）

$$\begin{aligned} H(S_E) &= w_0 \mathcal{H}(0.75) + w_1 \mathcal{H}(0.5) \\ &= \frac{2}{3}[-\frac{3}{4}\log_2(\frac{3}{4}) - \frac{1}{4}\log_2(\frac{1}{4})] + \frac{1}{3} \\ &= \frac{5}{3} - \frac{1}{2}\log_2 3 \end{aligned} \tag{4}$$

（3）

$$\begin{gathered} Z_t = 0 \text{のとき}, Y_t = X_t \oplus Z_t = X_t \oplus 0 = X_t \\ P(Y_t = 1) = P(X_t = 1) = \frac{1}{2} \\ Z_t = 1 \text{のとき}, Y_t = X_t \oplus Z_t = X_t \oplus 1 \\ P(Y_t = 1) = P(X_t = 0) = 1 - P(X_t = 1) = \frac{1}{2} \end{gathered} \tag{5}$$

（4）

$$\begin{aligned} I(X;Y) &= H(Y) - H(Y \mid X) \\ &= H(Y) - H(X \oplus S_E \mid X) \\ &= H(Y) - H(S_E \mid X) \\ &= H(Y) - H(S_E) \\ C = \lim_{n\to\infty} \max_{P_{X^n} \in \mathcal{P}_n} & \frac{1}{n} I(X^n; Y^n) = \mathcal{H}\left(\frac{1}{2}\right) - H(S_E) = 1 - H(S_E) \end{aligned} \tag{6}$$

令和四年

【問 1】 k を正の整数とする．入力アルファベットが $\mathcal{X} = \{0,1\}^k$，出力アルファベットが $\mathcal{Y} = \{0,1\}^k$ の無記憶な通信路 $W(Y|X)$ を

$$W(Y|X) = \begin{cases} 0 & (d(X,Y) = 0) \\ \dfrac{1}{k} & (d(X,Y) = 1) \\ 0 & (d(X,Y) \geq 2) \end{cases}$$

で定める．ただし，$d(X,Y)$ は，$X = (X_1, X_2, \cdots, X_k)$ と $Y = (Y_1, Y_2, \cdots, Y_k)$ の間のハミング距離

$$d(X,Y) = \sum_{i=1}^{k} |X_i - Y_i|$$

を表す．この通信路の通信路容量を求めよ．

解答

$$C = \log_2 s + \sum_{j=1}^{s} p_{1j} \log_2 p_{1j} = k + k \cdot \frac{1}{k} \log \frac{1}{k} = k - \log_2 k \tag{7}$$

【問 2】 アルファベットが $\{1,2,3,4\}$ である単純マルコフ情報源の遷移確率行列が

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 1-\gamma \end{pmatrix}$$

で与えられたとする．ここで，(i,j) 成分は遷移確率 $P(j|i)$ を表し，$0<\gamma<1$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) このマルコフ情報源の状態遷移図を図示せよ．

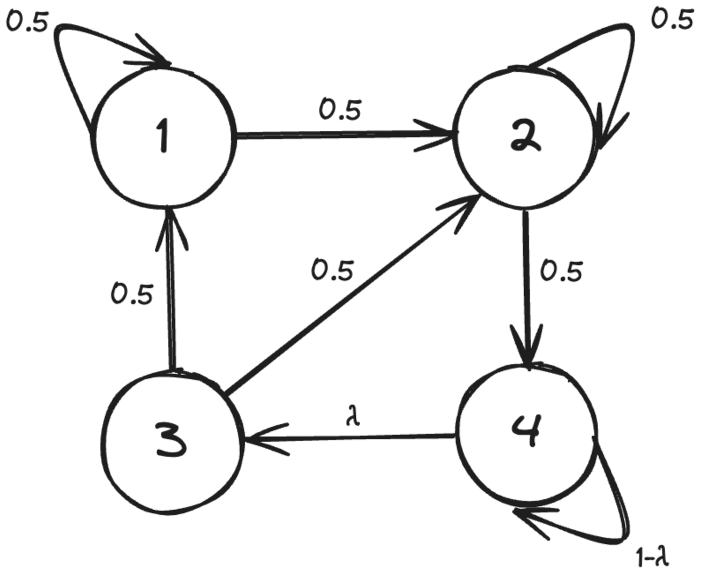
(2) このマルコフ情報源の定常確率分布が $(1/8, 1/4, 1/8, 1/2)$ であるとき，γ の値を求めよ．

(3) γ が前問で求めた値をとるとき，このマルコフ情報源のエントロピーレートを求めよ．

(4) このマルコフ情報源に従う確率変数の列 $X_1, X_2, ...$ を考える．X_1 が上記の定常確率分布 $(1/8, 1/4, 1/8, 1/2)$ に従う場合，(X_1, X_2) に対するハフマン符号化を行い，その符号の木を図示せよ．ただし，符号語のアルファベットは $\{0,1\}$ とする．

解答

（1）



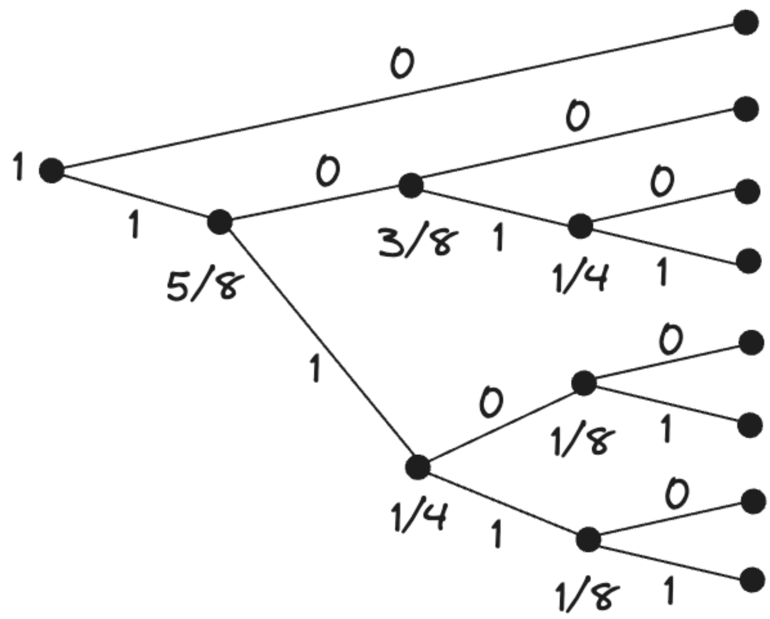
（2）

$$w = (\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{2})$$
$$\Pi = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 1-\gamma \end{bmatrix} \tag{8}$$
$$w\Pi = w \Rightarrow \lambda = 0.25$$

（3）

$$
\begin{aligned}
H(S_1) &= \mathcal{H}(0.5) = 1 \\
H(S_2) &= \mathcal{H}(0.5) = 1 \\
H(S_3) &= \mathcal{H}(0.5) = 1 \\
H(S_4) &= \mathcal{H}(0.25) = 2 - \frac{3}{4}\log_2 3 \\
H(S) &= \frac{1}{8}H(S_1) + \frac{1}{4}H(S_2) + \frac{1}{8}H(S_3) + \frac{1}{2}H(S_4) = \frac{3}{2} - \frac{3}{8}\log_2 3
\end{aligned} \tag{9}
$$

（4）



情報源記号	確率	符号語
44	$\frac{3}{8}$	0
22	$\frac{1}{8}$	100
24	$\frac{1}{8}$	1010
43	$\frac{1}{8}$	1011
11	$\frac{1}{16}$	1100
12	$\frac{1}{16}$	1101
31	$\frac{1}{16}$	1110
32	$\frac{1}{16}$	1111

令和三年

【問 1】 入力アルファベットと出力アルファベットがともに $\{1, 2, 3, 4\}$ である無記憶な通信路 $W(y|x)$ の通信路行列が

$$
\begin{pmatrix}
0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\
0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\
0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\
0.5 & 0 & 0 & 0.5
\end{pmatrix}
$$

で与えられているとする．ただし，(i, j) 成分は $W(j|i)$ を表す．この通信路の通信路容量を求めよ．また，それを達成する入力分布を全て求めよ．

解答

$$
\begin{gathered}
C = \log_2 s + \sum_{j=1}^{s} p_{1j} \log_2 p_{1j} = 2 - \mathcal{H}(0.5) = 1 \\
\text{入力分布は} \quad p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \frac{1}{4}
\end{gathered} \tag{10}
$$

【問 2】定常無記憶情報源 $X_1X_2\cdots$ を考える．この情報源のアルファベットを有限集合 $\mathcal{X}$ とし，各 X_i は確率分布 $p(x)$ に従うものとする．任意に固定された $\epsilon > 0$ に対し，系列 $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{X}^n$ が

$$2^{-n(H(X_1)+\epsilon)} \leq p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 2^{-n(H(X_1)-\epsilon)}$$

を満たすとき，この系列を $p(x)$ に関する典型系列であると言う．ここで，$H(X_1)$ は X_1 のエントロピーを表し，$p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ は同時確率分布を表す．全ての典型系列からなる集合を $A_\epsilon^{(n)}$ と表記する．次の各問いに答えよ．ただし，$\mathcal{X} = \{0, 1\}$，$p(0) = 1 - \alpha$，$p(1) = \alpha$ とする．ここで $\alpha \in (0, 1)$ は定数である．

(1) $(x_1, x_2, \ldots, x_{10}) = (0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$ に対し，$p(x_1, x_2, \ldots, x_{10})$ を求めよ．

(2) $i = 1, 2, \ldots, n$ に対する $H(X_i)$ および $H(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ を求めよ．

(3) $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ に対し，$S(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ とおく．$\alpha = 0.2$, $n = 200$, $\epsilon = 0.01$ とする．$A_\epsilon^{(n)}$ に属する系列 $\boldsymbol{x}$ に対する $S(\boldsymbol{x})$ の範囲を求めよ．

解答

（1）

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_{10}) = p(1)^3 p(0)^7 = \alpha^3 (1-\alpha)^7 \tag{11}$$

（2）

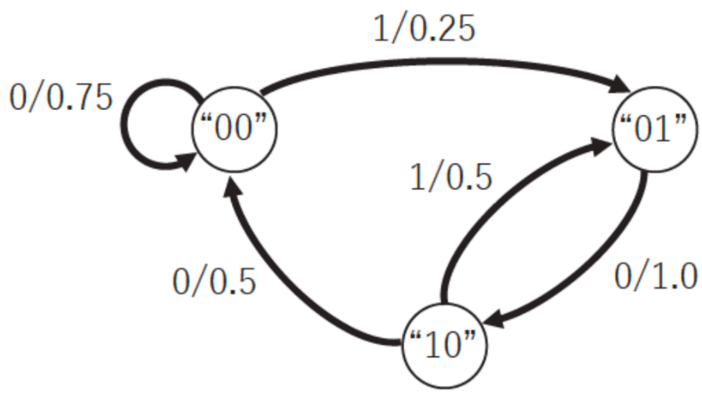
$$\begin{gathered} H(X_i) = -[(1-\alpha)\log_2(1-\alpha) + \alpha \log_2 \alpha] = \mathcal{H}(\alpha) \\ H(X_1, X_2, \ldots, X_n) = H(X_1) + H(X_2) + \cdots + H(X_n) = nH(X_i) = n\mathcal{H}(\alpha) \end{gathered} \tag{12}$$

（3）

$$\begin{gathered} 2^{-n(H(X_1)+\epsilon)} \leq p\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \leq 2^{-n(H(X_1)-\epsilon)} \\ -nH\left(X_1\right) - n\epsilon \leq \log_2[p\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)] \leq -nH\left(X_1\right) + n\epsilon \\ n[(1-\alpha)\log_2(1-\alpha) + \alpha\log_2\alpha] - n\epsilon \leq \log_2[\alpha^{S(\boldsymbol{x})}(1-\alpha)^{n-S(\boldsymbol{x})}] \leq n[(1-\alpha)\log_2(1-\alpha) + \alpha\log_2\alpha] + n\epsilon \\ \\ \begin{cases} S(\boldsymbol{x})\log_2\alpha + [n - S(\boldsymbol{x})]\log_2(1-\alpha) \geq n(1-\alpha)\log_2(1-\alpha) + n\alpha\log_2\alpha - n\epsilon \\ S(\boldsymbol{x})\log_2\alpha + [n - S(\boldsymbol{x})]\log_2(1-\alpha) \leq n(1-\alpha)\log_2(1-\alpha) + n\alpha\log_2\alpha + n\epsilon \end{cases} \\ \Downarrow \\ \begin{cases} S(\boldsymbol{x})\log_2(0.2) + 200\log_2(0.8) - S(\boldsymbol{x})\log_2(0.8) \geq 160\log_2(0.8) + 40\log(0.2) - 2 \\ S(\boldsymbol{x})\log_2(0.2) + 200\log_2(0.8) - S(\boldsymbol{x})\log_2(0.8) \leq 160\log_2(0.8) + 40\log(0.2) + 2 \end{cases} \\ \Downarrow \\ \begin{cases} -2S(\boldsymbol{x}) + 200\log_2(0.2) + 400 \geq 200\log_2(0.2) + 320 - 2 \\ -2S(\boldsymbol{x}) + 200\log_2(0.2) + 400 \leq 200\log_2(0.2) + 320 + 2 \end{cases} \\ \Downarrow \\ 39 \leq S(\boldsymbol{x}) \leq 41 \end{gathered} \tag{13}$$

令和二年

【問 1】下図は，定常 2 重マルコフ情報源 S の状態遷移図である．下記の設問に答えよ．



(1) 上図の状態遷移図を元に，このマルコフ情報源 S の遷移確率行列 A を求めよ．ただし，状態 “00”，“10”，“01” の順に，行を記せ．

(2) 時点 0 で状態 “00” にいたとして，時点 2 で状態 “10” にいる確率はいくらか答えよ．

(3) 上記のマルコフ情報源 S の定常分布 $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ を求めよ．ただし，w_i の添え字 $i = 1, 2, 3$ は状態 “00”, “10”, “01” にそれぞれ対応するものとする．

(4) 定常 2 重マルコフ情報源 $X_1, X_2, \ldots$ のエントロピーレート $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ が $H(X_3|X_1, X_2)$ に一致することを示せ．ただし，$H(X_3|X_1, X_2)$ は条件付きエントロピーである．

(5) 上記のマルコフ情報源 S に対するエントロピーレート $H(S)$ を求めよ．

解答

（1）

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

（2）

$$A^2 = \begin{bmatrix} \frac{9}{16} & \frac{1}{4} & \frac{3}{16} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow P = \frac{1}{4} \tag{15}$$

（3）

$$\begin{cases} w_1 + w_2 + w_3 = 1 \\ \vec{w}A = \vec{w} \end{cases} \Rightarrow \vec{w} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \tag{16}$$

（4）

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H(X_1,X_2,\ldots,X_n) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[H(X_1)+H(X_2|X_1)+H(X_3|X_1,X_2)+\cdots+H(X_n|X_1,\ldots,X_{n-1})] \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[H(X_1)+H(X_2|X_1)+H(X_3|X_1,X_2)+\cdots+H(X_n|X_{n-2},X_{n-1})] \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[H(X_3|X_1,X_2)+\cdots+H(X_n|X_{n-2},X_{n-1})] \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n-2}{n}H(X_3|X_1,X_2) \\
&= H(X_3|X_1,X_2)
\end{aligned} \tag{17}
$$

（5）

$$
H(S) = w_1\mathcal{H}(\frac{1}{4}) + w_2\mathcal{H}(\frac{1}{2}) + w_3\mathcal{H}(1) = \frac{5}{4} - \frac{3}{8}\log_2 3 \tag{18}
$$

【問 2】 X, Y を $\{0,1\}$ に値をとる確率変数とする．パラメータ $\alpha,\beta,\gamma\in[0,1]$ に対し，

$$
\begin{aligned}
P(X=0) &= \alpha, & P(X=1) &= 1-\alpha, \\
P(Y=0|X=0) &= \beta, & P(Y=1|X=0) &= 1-\beta, \\
P(Y=0|X=1) &= \gamma, & P(Y=1|X=1) &= 1-\gamma,
\end{aligned}
$$

とする．2 値エントロピー関数を

$$
h(p) = \begin{cases} -p\log p - (1-p)\log(1-p), & \text{for } 0<p<1, \\ 0, & \text{for } p=0,1 \end{cases}
$$

とする．以下の問いに答えよ．

(1) 条件付きエントロピー $H(Y|X)$ を 2 値エントロピー関数を用いて表現せよ．

(2) $\beta=1-\gamma$ とする．このとき，相互情報量 $I(X;Y)$ を最大化する α を求めよ．また $I(X;Y)$ の最大値を 2 値エントロピー関数と α,β を用いて表現せよ．

(3) α,β をある値に固定する．ただし，$0<\alpha<1$ とする．相互情報量 $I(X;Y)$ を最小化する γ の値を α,β を用いて表せ．また，その最小値を示せ．

(4) α,β をある値に固定する．ただし，$0<\alpha<1$, $\beta>\frac{1}{2}$ とする．相互情報量 $I(X;Y)$ を最大化する γ の値を求めよ．

解答

（1）

$$
H(Y|X) = \alpha h(\beta) + (1-\alpha)h(\gamma) \tag{19}
$$

（2）

$$
\begin{gathered}
\alpha = \frac{1}{2} \\
\max_{\alpha} I(X;Y) = 1 - h(\beta)
\end{gathered} \tag{20}
$$

（3）

$$
\begin{gathered}
\gamma = \beta \\
\min_{\gamma} I(X;Y) = 0
\end{gathered} \tag{21}
$$

（4）

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) = h(\alpha\beta + (1-\alpha)\gamma) - \alpha h(\beta) - (1-\alpha)h(\gamma)$$
$$f(\gamma) = h(\alpha\beta + (1-\alpha)\gamma) - (1-\alpha)h(\gamma) \text{の最大値問題を解くことになる} \tag{22}$$
$$\gamma = 0$$

令和元年

【問 1】 情報源アルファベットが $\mathcal{X} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}\}$ の離散無記憶情報源があり，記号 $x \in \mathcal{X}$ の出現確率 $p(x)$ が以下の表で与えられている．ただし $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ とする．

x	a	b	c	d
$p(x)$	$\frac{\alpha}{2}$	$\frac{1-\alpha}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

以下の問いに答えよ．

(1) この情報源のエントロピーを α の関数として求めよ．

(2) $0 < \alpha < \frac{1}{4}$ のときのこの情報源に対する 2 元ハフマン符号を 1 つ求めよ．

(3) (2) の符号の平均符号長（符号長の期待値）を α の関数として求めよ．

(4) $\frac{1}{4} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ のときのこの情報源に対する 2 元ハフマン符号の平均符号長を求めよ．

(5) この情報源に対する 2 元ハフマン符号の平均符号長を $L(\alpha)$ とおく．$\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$ に対する $L(\alpha)$ のグラフをかけ．

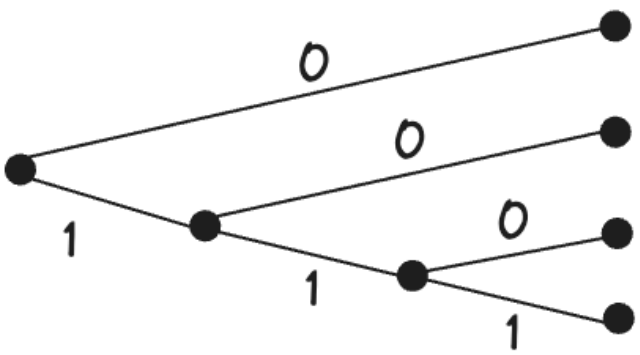
解答

（1）

$$H(S) = 1 - \frac{\alpha}{2}\log_2\frac{\alpha}{2} - \frac{1-\alpha}{2}\log_2\frac{1-\alpha}{2} \tag{23}$$

（2）

$$0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{1}{4} \quad \frac{3}{8} < \frac{1-\alpha}{2} < \frac{1}{2} \tag{24}$$



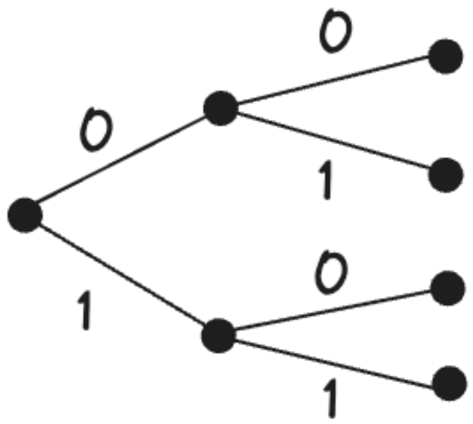
情報源記号	確率	符号語
b	$\frac{1-\alpha}{2}$	0
c	$\frac{1}{4}$	10
d	$\frac{1}{4}$	110
a	$\frac{\alpha}{2}$	111

（3）

$$\overline{L} = \frac{1-\alpha}{2} + \frac{1}{4}\cdot 2 + \left(\frac{1}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot 3 = \frac{7}{4} - \frac{\alpha}{3}\,(\text{ビット}) \tag{25}$$

（4）

$$\frac{1}{8} \le \frac{\alpha}{2} \le \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \le \frac{1-\alpha}{2} \le \frac{3}{8} \tag{26}$$

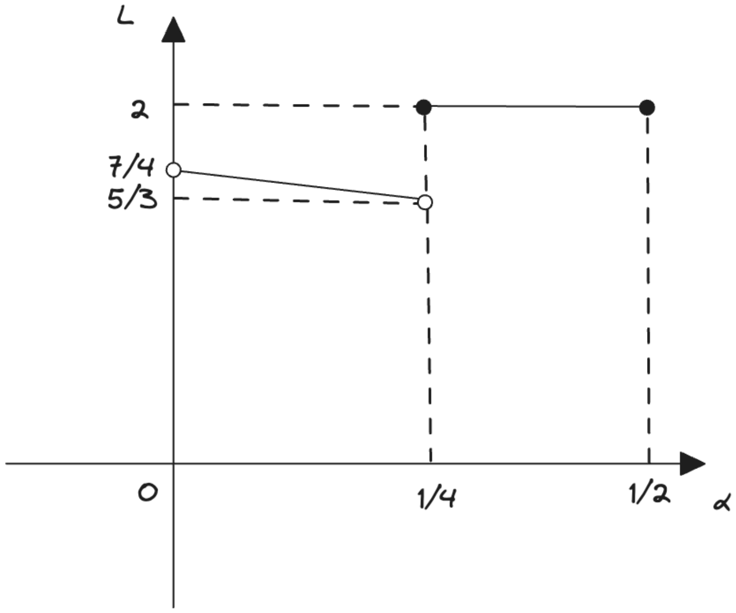


情報源記号	確率	符号語
b	$\frac{1-\alpha}{2}$	00
c	$\frac{1}{4}$	01
d	$\frac{1}{4}$	10
a	$\frac{\alpha}{2}$	11

$$\overline{L} = 2\,(\text{ビット}) \tag{27}$$

（5）

$$L(\alpha) = \begin{cases} \frac{7}{4} - \frac{\alpha}{3} & 0 < \alpha < \frac{1}{4} \\ 2 & \frac{1}{4} \le \alpha \le \frac{1}{2} \end{cases} \tag{28}$$



【問 2】アルファベット $\{1,2,3\}$ 上の Markov 情報源 $X_1X_2\cdots$ の遷移確率行列が

$$P=(p_{ij})=\begin{pmatrix}0.25 & 0.25 & 0.5\\ 0.4 & 0.6 & 0\\ 0 & 0.2 & 0.8\end{pmatrix}$$

で与えられているとき，次の各問に答えよ．ただし，p_{ij} は $X_t=i$ のもとで $X_{t+1}=j$ となる条件付き確率を表す．

(1) P の固有値の一つが 1 であることを示せ．

(2) 行ベクトル v が固有値 1 に対応する P の左固有ベクトルであり，その要素の総和が 1 であるとする．v の持つ意味を述べよ．ただし，固有値 λ に対応する P の左固有ベクトルとは，$vP=\lambda v$ を満たすゼロでない行ベクトル v のことである．

(3) 固有値 1 に対応する P の右固有ベクトルを求めよ．ただし，固有値 λ に対応する P の右固有ベクトルとは，$Pu=\lambda u$ を満たすゼロでない列ベクトル u のことである．

(4) 任意のベクトル v について，$||v||_1$ でその要素の絶対値の総和を表す．行ベクトル v について，$||vP||_1\le||v||_1$ を示せ．

(5) P の任意の固有値の絶対値は 1 以下であることを示せ．

解答

（1）

$$\begin{aligned}|T|=|\lambda E-P|&=\begin{vmatrix}\lambda-0.25 & -0.25 & -0.5\\ -0.4 & \lambda-0.6 & 0\\ 0 & -0.2 & \lambda-0.8\end{vmatrix}\\ \lambda=1\text{とすると},|T|&=\begin{vmatrix}0.75 & -0.25 & -0.5\\ -0.4 & 0.4 & 0\\ 0 & -0.2 & 0.2\end{vmatrix}=0\end{aligned}\tag{29}$$

（2）

$$v\text{はマルコフ情報源の定常分布}\tag{30}$$

（3）

$$Tu=0\Rightarrow u=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\tag{31}$$

（4）

$$\begin{aligned}\|vP\|_1=&|v_1p_{11}+v_2p_{21}+v_3p_{31}|+|\ v_1p_{12}+v_2p_{22}+v_3p_{32}|+|v_1p_{13}+v_2p_{23}+v_3p_{33}\ |\\ \le&(|v_1p_{11}|+|v_2p_{21}|+|v_3p_{31}|)+(|v_1p_{12}|+|v_2p_{22}|+|v_3p_{32}|)+(|v_1p_{13}|+|v_2p_{23}|+|v_3p_{33}|)\\ =&|v_1|\sum_{j=1}^{3}p_{1j}+|v_2|\sum_{j=1}^{3}p_{2j}+|v_3|\sum_{j=1}^{3}p_{3j}\\ =&|v_1|+|v_2|+|v_n|\\ =&\|v\|_1\end{aligned}\tag{32}$$

（5）

$$
\begin{aligned}
\|Pv\|_1 =&|p_{11}v_1 + p_{12}v_1 + p_{13}v_1| + |p_{21}v_2 + p_{22}v_2 + p_{23}v_2| + |p_{31}v_3 + p_{32}v_3 + p_{33}v_3| \\
\leq&(|p_{11}v_1| + |p_{12}v_1| + |p_{13}v_1|) + (|p_{21}v_2| + |p_{22}v_2| + |p_{23}v_2|) + (|p_{31}v_3| + |p_{32}v_3| + |p_{33}v_3|) \\
=&|v_1|\sum_{j=1}^{3} p_{1j} + |v_2|\sum_{j=1}^{3} p_{2j} + |v_3|\sum_{j=1}^{3} p_{3j} \\
=&|v_1| + |v_2| + |v_3| \\
=&\|v\|_1
\end{aligned}
\tag{33}
$$

$Pv = \lambda v$とすると, $\|Pv\|_1 = \|\lambda v\|_1 = |\lambda v_1| + |\lambda v_2| + |\lambda v_3| = |\lambda| \cdot \|v\|_1$

$\|Pv\|_1 \leq \|v\|_1 \Rightarrow |\lambda| \cdot \|v\|_1 \leq \|v\|_1 \Rightarrow |\lambda| \leq 1$